



TITLE:

Adapted Conesとその応用 (複素領域上の線型解析)

AUTHOR(S):

池上, 輝男

CITATION:

池上, 輝男. Adapted Conesとその応用 (複素領域上の線型解析). 数理解析研究所講究録 1979, 366: 63-70

ISSUE DATE:

1979-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104603>

RIGHT:

Adapted Cones とその応用

大阪市立大 理 池上輝男

1. 背景.

M.V. Keldyich は 1941 年に \mathbb{R}^n の有界領域 D の正則境界点 x に対して, D で調和, \bar{D} で連続非負, x でのみ 0 とする関数の存在」を示し, これを使って stable points の特徴づけや, 次の generalized Dirichlet solution H_f の特徴づけを行なった [10].

定理 A. D の境界 ∂D 上の有界連続実関数の全体 $C(\partial D)$ から D で調和な関数の全体 $H(D)$ への mapping \mathcal{L} が

$$1) \quad \mathcal{L}_{f+g} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_g; \quad f \geq 0 \text{ ならば } \mathcal{L}_f \geq 0;$$

$$2) \quad f \rightsquigarrow u \in \mathcal{F} = C(\bar{D}) \cap H(D) \text{ の } \partial D \text{ への制限であれば}$$

$$\mathcal{L}_f = u$$

とみたせば $\mathcal{L}_f = H_f$ (H_f は Perron-Wiener-Brelot の方法による Dirichlet 解)

1961 年に H. Bauer は Choquet 境界の理論と Dirichlet 問題を抽象的に展開して次の結果を得た [1]

定理 B $x \in \bar{D}$, $\mathcal{H}_x = \{\mu; \bar{D} \text{ 上の Borel measure, } \mu(v) \leq v(x) \forall v \in \mathcal{G}\}$

$Ch_{\mathcal{G}} \bar{D} = \{x \in \bar{D}; \mathcal{H}_x = \{\varepsilon_x\}\}$ とおくと

$$Ch_{\mathcal{G}} \bar{D} = D_{reg} \quad (D \text{ の正則境界点の全体})$$

ただし, \mathcal{G} は D で優調和, \bar{D} に連続的に延長される関数の全体

その後 これらの結果と調和空間に対して拡張する研究がなされた. 大ざっぱに言つて axiom of domination とみたす P 型 Brelot 空間では定理 A, B 共に成り立つ. 前者は M. Brelot [7] により, 後者は N. Boboc - A. Cornea [4] によつて示されている. しかし heat equation の解と調和関数とする Bauer 空間では両定理とも一般には成り立たない [11].

以下では この問題が Bauer 空間の必ずしも relatively compact でない open set に対して どの様な形で定理化されるかを述べる. 定理 B に関しては Bliedtner - Hansen の結果 (後述 3) が一般的な完全解答であろうと思われる. 定理 A については relatively compact の場合の J. Lukers (後述 4) の結果を一般化する. そしてこれが本論の主目的である. 何れの場合でも ^{相対}コンパクト性と仮定しないので compact の外での関数の挙動を制限する条件が必要となる. それには adapted cone を考えることが適切であろう.

2. Adapted cones.

adapted cone の概念は moment problem を扱うための G. Choquet [8] により導入され, Mokobodzki-Sibony により系統的に展開された [13].

X を可算基をもつ局所コンパクト Hausdorff 空間とする.

convex cone $P \subset C(X)$ は次の条件をみたすとき adapted と呼ばれる:

$$1) \quad \forall x \in X \quad \exists p \in P; \quad p(x) > 0$$

$$2) \quad \forall p \in P \quad \exists q \in P \text{ s.t. } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \subset X \text{ compact, } p < \varepsilon q \text{ on } X \setminus K$$

Example X を strong Bauer space [2] とする. X 上の連続な potentials の全体 P は adapted cone であるが正の調和関数の全体は必ずしも adapted でない.

adapted cone P に対して $P^+ = \{p \in P; \quad p \geq 0\}$ とおく. P^+ は

$$\forall x, y \in X, \quad x \neq y, \quad \forall \lambda \geq 0 \quad \exists p \in P^+ \quad p(x) \neq \lambda p(y)$$

をみたすとき, linearly separating, また

$$p_1, p_2 \in P^+ \Rightarrow \inf(p_1, p_2) \in P^+$$

のとき inf-stable であるという.

以下 P^+ は linearly separating, inf-stable と仮定する.

adapted cone が有力である理由の一つは 次の近似定理が成り立つことにあると思われる:

近似定理. [13] P は adapted cone, $f \in C_P(X) = \{f \in C(X); \exists p \in P$

$|f| \leq p\}$ とする. このとき次の性質をもつ $p_0 \in P^+$ が存在する:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_1, p_2 \in P^+ \quad |f - (p_1 - p_2)| < \varepsilon p_0 \text{ on } X.$$

X 上の正の measure μ で P の関数がすべて μ -integrable であるものの全体を \mathcal{M} とし, \mathcal{M} に次の順序を入れる:

$$\mu < \nu \iff \mu(p) \leq \nu(p) \quad \forall p \in P.$$

$$x \in X \text{ に対して } \mathcal{M}_x = \{ \mu \in \mathcal{M}; \mu < \varepsilon_x \} \text{ とおくと}$$

$\{ x \in X; \mathcal{M}_x = \{ \varepsilon_x \} \}$ は Choquet boundary といって $Ch_P(X)$ とかく.

X 上の下半連続関数 v は次の条件をみたすとき P -concave といふ.

$$1) \quad \exists p \in P : v \geq -p$$

$$2) \quad x \in X, \mu \in \mathcal{M}_x \Rightarrow \mu(v) \leq v(x).$$

P -concave な関数の全体を \hat{P} で表わすとき

$$H(P) = \hat{P} \cap (-\hat{P})$$

とおき, $H(P)$ の関数を P -affine といい.

adapted cone P は

「すべての $x \in X$ に対して \mathcal{M}_x は順序 $<$ に関して唯一つの minimal μ_x を持つ」

とき simplicial といふ.

次の定理は Bliedtner-Hausen [3] による.

定理 1 次の (1), (2) は同値である

$$(1) \quad P \text{ は simplicial,}$$

$$(2) \quad u, v \in P, \quad u \leq v \Rightarrow \exists h \in H(P): u \leq h \leq v$$

このとき, $p \in P$ に対して

$$\mu_x(p) = \sup \{ h(x); h \in H(P), h \leq p \}.$$

従って $\mu_x(P)$ は x の関数として X で下半連続である.

3. Bliedtner-Hansen の結果.

$X \in \mathcal{P}$ -harmonic space [9], $P \in X$ 上の連続な potentials の全体, $U \in X$ の open subset とする.

$$S(U) := \{ s \in \mathbb{C}_P(\bar{U}); s \text{ は } U \text{ 上優調和} \}$$

は adapted cone であり, $S^+(U)$ は linearly separating, inf-stable.

Bliedtner-Hansen [3] は essential balayage を使って 次の定理を証明した. これは定理 B の拡張に対する解答である.

定理 2.

(1) $S(U)$ は simplicial cone である,

(2) 次の (i), (ii) は同値である.

$$(i) \quad \mu_x = \varepsilon_x^{QU} \quad \forall x \in \bar{U}$$

$$(ii) \quad \varepsilon_x^{QU}(\partial U \setminus U_{\text{reg}}) = 0 \quad \forall x \in U$$

従って (ii) $\Rightarrow \text{Ch}_{S(U)}(\bar{U}) = U_{\text{reg}}.$

4. J. Lukeš の結果.

J. Lukeš [12] は U が relatively compact のとき 次の結果

を得た。(定理 A での \bar{L} は Keldyck operator と呼ぶ)

定理 (Lukáš) 次の (i), (ii), (iii) は同値である:

(i) $\partial U \setminus \text{ch}_S(U)(\bar{U})$ は negligible, すなわち

$$\varepsilon_x^{GU}(\partial U \setminus \text{ch}_S(U)(\bar{U})) = 0 \quad \forall x \in U,$$

(ii) \bar{L} は Keldyck operator ならば $\bar{L}f = H_f \quad \forall f \in C(\partial U)$,

(iii) $\partial U \setminus U_{\text{reg}}$ は negligible.

吾々の目標はこの定理を U が必ずしも relatively

compact でない場合に拡張することである.

5. J. Lukáš の結果の拡張.

まず normalized solution _{Dirichlet} に関する注意から始める.

f は ∂U 上の実関数 ($\pm\infty$ とする事を許す) とするとき

$$\bar{H}_f^0(a) = \inf \{ v(a); \begin{array}{l} \text{hyperharmonic on } U, \text{ 下は有界,} \\ \liminf v \geq f \text{ on } \partial U, X \text{ のある compact set の外で } v \geq 0 \end{array} \}$$

$$H_f^0 = -\bar{H}_f^0(-f)$$

と定義する. $H_f^0 = \bar{H}_f^0$ であり, かつこれが調和のとき H_f^0 とかき normalized solution と呼ぶ. 又このとき f は resoluteive という. このとき容易に次の事がわかる.

$$\bar{H}_f^0(a) = \inf \{ v(a); \begin{array}{l} \text{hyperharmonic on } U, \liminf v \geq f \text{ on } \partial U \\ \exists p \in P: v \geq -p \end{array} \}$$

(右辺は [14] で考察された \bar{H}_f^U である)

$f \in C_P(\partial U)$ は *resolutive* [14], 特 $f \in C_0(\partial U)$ (compact support をもつ関数) は *resolutive*. 従 $\underbrace{\tau}_{a \in U \text{ に対}} \partial U \text{ 上}$ に Borel measure λ_a が存在して

$$\lambda_a(f) = H_f^0(a) \quad \forall f \in C_P(\partial U).$$

λ_a は ε_a^{QU} に他ならない.

$$\lim_{a \rightarrow x} H_f^0(a) = f(x) \quad \forall f \in C_P(\partial U)$$

とみたす $x \in \partial U$ を *regular* とし, *regular boundary points* の全体を U_{reg} で表す.

吾々の目的のためには Keldyich operator \mathcal{L} の定義を次の様 \rightarrow modify する: \mathcal{L} は次の 1), 2) をみたす $\underbrace{C_P(\partial U)}_{\text{調和な関数の空間の中への写像である}}$ から U で調和な関数の空間の中への写像である

1) \mathcal{L} は linear, positive

2) $s \in S(U) \Rightarrow \mathcal{L}s \leq s$ on U .

明らかに $f \mapsto H_f^0$ は Keldyich operator である. Keldyich operator が \rightarrow の normalized solution 以外に他ないための必要十分条件が *irregular boundary points* の集合が negligible である, すなわち axiom of polarity. がみたされることであることが示される. 従って結論的に云えば adapted cones を考えることにより定理 A, 定理 B 共に axiom of domination の下で必ずしも relatively compact でない open set に対しても成り立つ.

- [1] H. Bauer: Šilovscher Rand und Dirichletschen Problem, A.I.F. Grenoble 11 (1961)
- [2] H. Bauer: Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie (Lecture Notes in Math. 22) (1966)
- [3] J. Blidtner-W. Hansen: Simplicial cones in potential theory, Inven. math., 29 (1975)
- [4] N. Boboc-A. Cornea: Cône des fonctions continues sur un espace compact, C.R. Acad. Sc. Paris 261 (1965)
- [5] N. Boboc-A. Cornea: Convex cones of lower semi-continuous functions on compact spaces, Rev. Roum. Math. pures et appl. 12 (1967)
- [6] M. Brelot: Lectures on potential theory, Tata Inst. of Fund. Reser. (1960)
- [7] M. Brelot: Sur un théorème de prolongement fonctionnel de Keldych concernant le problème de Dirichlet, J. D'analyse Math. 8 (1960-61)
- [8] G. Choquet: Le problème des moments, Sémin. Choquet 1 (1961-62)
- [9] C. Constantinescu-A. Cornea: Potential theory on harmonic spaces, Grundlehren der math. Wiss. 158 (1972)
- [10] M.V. Keldych: On the solvability and stability of Dirichlet problem, Uspehi Math. Nauk 8 (1941) (Amer. Math. Soc. Translation II, Ser. 51 (1966))
- [11] J. Köhn-M. Sieveking: Reguläre und extremale Randpunkt in der Potentialtheorie, Rev. Roum. Math. pures et appl. 12 (1967)
- [12] J. Lukeš: Théorème de Keldych dans la théorie axiomatique de Bauer des fonctions harmoniques, Czechoslovak M.J. 24 (1974)
- [13] G. Mokobodzki-D. Sibony: Cône adaptés de fonctions continues et théorie du potentiel, Sémin. Choquet 6 (1966-67)
- [14] H. Watanabe: Simplexes and Dirichlet problem on locally compact spaces, Hiroshima M.J. 6 (1976)